הרצאה מספר 53
אלגברה 1 מ 104016

הנושא: מטריצות אורתוגונליות ואוניטריות
לכסון אורתוגונלי
אופרטור צמוד (בקצרה)
מסקנות לגבי מטריצות ממשיות סימטריות

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.28 מטריצות אורתוגונליות ואוניטריות

- נתבונן במטריצה מעבר $P = P_{e\to f}$ מהבסיס $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ לבסיס $f = \{u_1, u_2, u_3\}$ כאשר

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) \end{aligned}$$

- נשים לב ש־ $P^tP = I$.
- באופן דומה המשוואה $P^t_{e\to f}P_{e\to f} = I$ תתקיים לכל בסיס א"נ f.
- מדובר במעבר לבסיס ישר זוית ומנורמל אחר.
- <u>שאלה:</u> עבור אלו מטריצות A קיים מעבר בסיס מסוג זה, כך ש־ $D = P^{-1}AP$ תהיה אלכסונית?

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.28 מטריצות אורתוגונליות ואוניטריות

- <u>הגדרה:</u> $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא

  מטריצה אורתוגונלית (orthogonal) אם $AA^t = I$.

- כמובן שגם $A^tA = I$, וכל אחד מהשיוונות האלה מספיק.
- <u>הגדרה:</u> $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ היא

  מטריצה אוניטרית (unitary) אם $AA^* = I$.

- <u>דוגמות:</u>
  - המטריצה P מהדוגמה הקודמת היא אורתוגונלית.
  - המטריצה $Q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ היא אוניטרית.

$$Q^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Q$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.28 מטריצות אורתוגונליות ואוניטריות

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית (orthogonal) אם $AA^t = A^tA = I$.
- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ היא מטריצה אוניטרית (unitary) אם $AA^* = A^*A = I$.

- משפט: התנאים הבאים שקולים (מעל $\mathbb{R}$):

1. A היא מטריצה אורתוגונלית.
2. השורות של A הן אורתונורמליות (יחסית למ"פ הסטנדרטית).
3. העמודות של A הן אורתונורמליות (יחסית למ"פ הסטנדרטית).

- מעל $\mathbb{C}$ צריך אוניטריות במקום אורתוגונלית בתנאי הראשון.
- הוכחה: נוכיח מעל $\mathbb{C}$. (מעל $\mathbb{R}$ מתקיים $A^* = A^t$.)
  - השורות של A הן אורתונורמליות (יחסית למ"פ הסטנדרטית) אם"ם $AA^* = I$.
  - העמודות של A הן אורתונורמליות (יחסית למ"פ הסטנדרטית) אם"ם $A^*A = I$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.29 לכסון אורתוגונלי

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית (orthogonal) אם $AA^t = A^tA = I$.

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא **לכסינה אורתוגונלית** (orthogonally diagonalizable)

אם קיימת מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים $P^tAP = D$.

תזכורת: $P^t = P^{-1}$ למט' א"ג.

- אבחנה: אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ לכסינה אורתוגונלית אזי A סימטרית.

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^tD^tP^t = PDP^t = A$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.29 לכסון אורתוגונלי

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית (orthogonal) אם $AA^t = A^tA = I$.

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא **לכסינה אורתוגונלית** (orthogonally diagonalizable)

אם קיימת מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים $P^tAP = D$.

תזכורת: $P^t = P^{-1}$ למט' א"ג.

- דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.29 לכסון אורתוגונלי

- הגדרה: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא לכסינה אורתוגונלית

אם קיימת מטריצה אורתוגונלית P ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים $P^tAP = D$.

- אבחנה: A לכסינה אורתוגונלית

אם"ם קיים בסיס אורתונורמלית של וקטורים עצמיים של A.

- הוכחה: העמודות של P חייבות להיות:
  - בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$. כי P מטריצה אורתוגונלית.
  - בסיס של ו"ע של A. כי P מטריצה מלכסנת של A.

- משפט: A לכסינה אורתוגונלית אם"ם A מטריצה ממשית וסימטרית.
  - את הכיוון הקל כבר ראינו כאבחנה (בעמוד הקודם).
  - את הכיוון הקשה לא נוכיח. חלק ממרכיבי ההוכחה יופיעו בהמשך.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.30 האופרטור הצמוד וההשלכה למטריצות

- **משפט:** יהי $V = \mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית. לכל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ולכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$.

- **הוכחה:**

$$
\begin{aligned}
\langle Au, v\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (Au)_i \overline{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right) \overline{v_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overline{v_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} v_i \right)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} (A^*)_{ji} v_i \right)} = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{(A^* v)_j} \\
&= \langle u, A^* v\rangle \qquad \square
\end{aligned}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

12.30 האופרטור הצמוד וההשלכה למטריצות

- **משפט:** יהי $V = \mathbb{C}^n$ עם המ"פ הסטנדרטית. לכל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ולכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle$.

- **מסקנה:** $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^t v\rangle$.

- **הגדרה:** יהי $T : V \to V$ א"ל על מ.מ.פ. V. א"ל T^* נקרא **האופרטור הצמוד** (adjoint) **של** T אם לכל $\vec{u}, \vec{v}$ מתקיים $\langle T(\vec{u}), \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, T^*(\vec{v})\rangle$.
- **משפט:** לכל א"ל $T : V \to V$ על מ.מ.פ. V קיים א"ל יחיד המקיים את הדרישה הנ"ל.
- **משפט:** אם B בסיס אורתונורמלי של מ.מ.פ. V ו־ $T : V \to V$ א"ל אז $[T^*]_B = ([T]_B)^*$.
- שני המשפטים הקודמים אינם בחומר למבחן. לא נוכיח אותם.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות